ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
Δευτέρα 10 Ιουνίου 2019
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

(Ενδεικτικές Απαντήσεις)

Α1. α) Σχολικό Βιβλίο σελ. 15

β) i) Σχολικό Βιβλίο σελ. 35

ii) Σχολικό Βιβλίο σελ. 35-36

Α2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 142

Α3. Σχολικό Βιβλίο σελ. 135 (Απόδειξη)

Α4. α) Λάθος

Αντιπαράδειγμα σχολικό βιβλίο σελ. 134

β) Λάθος

Αντιπαράδειγμα σχολικό βιβλίο σελ. 71
(Δεν εξασφαλίζεται η συνέχεια της f στο x_0)

Α5. Σωστή Απάντηση είναι η επιλογή (γ).

ΘΕΜΑ Β

(Β1) Ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}+\lambda)=2 \Leftrightarrow 0+\lambda=2 \Leftrightarrow \boxed{\lambda=2}$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} \underset{y\to-\infty}{\overset{-x=y}{=\!=\!=}} \lim\limits_{y\to-\infty} e^{y}=0$

(Β2) Θεωρούμε τη συνάρτηση g με $g(x)=f(x)-x=e^{-x}-x+2$, $x\in[2,3]$

Η g συνεχής στο $[2,3]$ ως πράξεις συνεχών

$$\left.\begin{aligned} g(2)&=e^{-2}-2+2=e^{-2}>0\\ g(3)&=e^{-3}-3+2=e^{-3}-1=\frac{1}{e^3}-1=\frac{1-e^3}{e^3}<0\end{aligned}\right\} g(2)\cdot g(3)<0$$

Από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(2,3)$ ώστε:

$$g(x_0)=0 \Leftrightarrow \boxed{f(x_0)=x_0}$$

Επίσης $g'(x)=-e^{-x}-1<0$ για κάθε $x\in[2,3]$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε η $x=x_0$ είναι μοναδική λύση

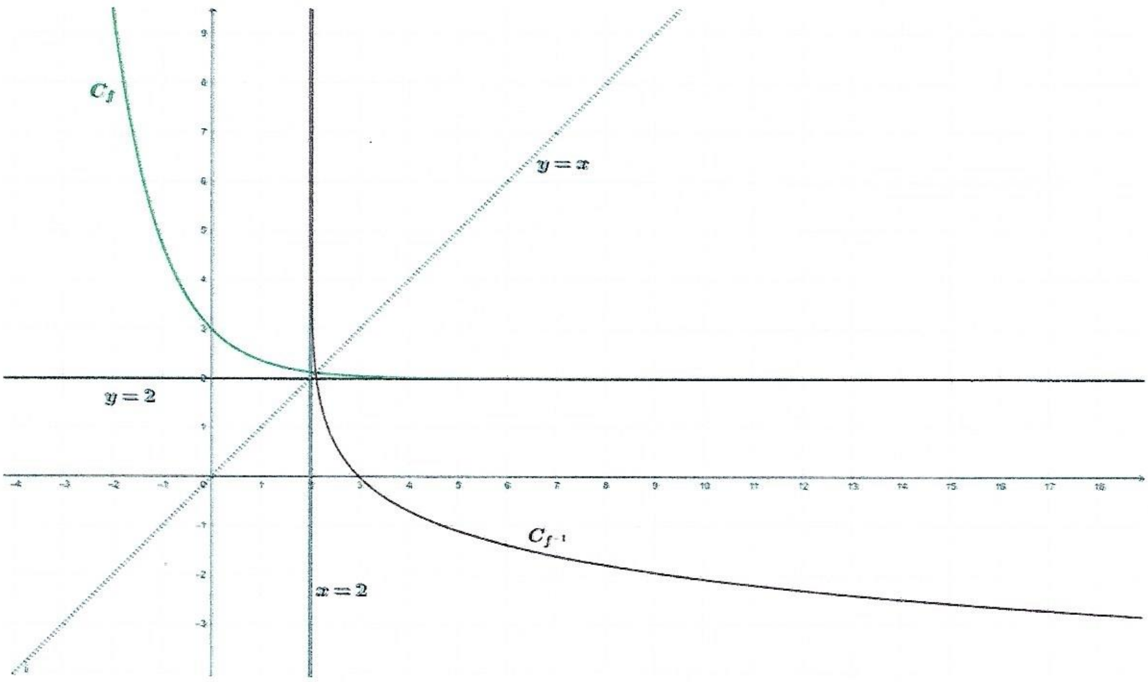
(Β3) $f'(x)=-e^{-x}<0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

$$y=f(x) \Leftrightarrow y=e^{-x}+2 \overset{y>2}{\Longleftrightarrow} y-2=e^{-x} \Leftrightarrow \ln(y-2)=-x$$

$$\Leftrightarrow -\ln(y-2)=x. \text{ Άρα } \boxed{f^{-1}(x)=-\ln(x-2)},\ x>2$$

(Β4) $\lim\limits_{x\to2^+} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\left[-\ln(x-2)\right] \underset{y\to0^+}{\overset{x-2=y}{=\!=\!=}} \lim\limits_{y\to0^+}(-\ln y)=+\infty$

Άρα η $\boxed{x=2}$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$



C_f
$y = x$
$y = 2$
$C_{f^{-1}}$
$x = 2$

ΘΕΜΑ Γ

(Γ1) Πρέπει η f να είναι συνεχής στο $x_0=1$, δηλαδή:

$$f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x) \quad (1)$$

Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} & f(1)=1^2+\alpha=1+\alpha \\ & \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(e^{x-1}+\beta x\right)=e^0+\beta=1+\beta \\ & \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(x^2+\alpha\right)=1+\alpha \end{aligned}\right\} \overset{(1)}{\Longrightarrow} 1+\alpha=1+\beta \Rightarrow \boxed{\alpha=\beta}\ (2)$$

Επίσης πρέπει

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\in\mathbb{R} \quad (3)$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+\cancel{\alpha}-1-\cancel{\alpha}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=2$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\alpha}{x-1}\overset{(2)}{=}\lim_{x\to 1^-}\left[\frac{e^{x-1}-1}{x-1}+\frac{\beta\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}\right]=1+\beta$$

διότι

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{\left(e^{x-1}-1\right)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}}{1}=e^0=1$$

Από σχέση (3) προκύπτει: $1+\beta=2 \Leftrightarrow \boxed{\beta=1}$ $\quad (2)\Rightarrow \boxed{\alpha=1}$

(Γ2) Για

$$\left.\begin{aligned} & \underline{x>1}:\ f'(x)=2x>0 \\ & \underline{x<1}:\ f'(x)=e^{x-1}+1>0 \\ & \underline{x=1}:\ f'(1)=2>0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} & f'(x)>0,\ x\in\mathbb{R} \\ & \text{άρα η } f \text{ γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} & \lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\left(e^{x-1}+x\right)=-\infty,\ \text{αφού } \lim_{x\to -\infty} e^{x-1}\ \underset{y\to -\infty}{\overset{x-1=y}{=}}\ \lim_{y\to -\infty} e^{y}=0 \\ & \lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(x^2+1\right)=\lim_{x\to +\infty} x^2=+\infty \end{aligned}\right\} f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$$

(Γ3) (i) Η f συνεχής στο $[-1,0]$

$f(-1)=e^{-2}-1=\frac{1}{e^2}-1=\frac{1-e^2}{e^2}<0$

$f(0)=e^{-1}>0$

$f(-1)f(0)<0$. Από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(-1,0)$ ώστε $f(x_0)=0$

Αφού η f γνησίως αύξουσα, η $x=x_0$ μοναδική λύση

ii) $f^2(x)-x_0 f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)\left(f(x)-x_0\right)=0$

Άρα $f(x)=0$ ή $f(x)=x_0$ (1)

Η (1) είναι αδύνατη, διότι:

για $x>x_0 \xrightarrow{f\uparrow} f(x)>f(x_0)$, όμως $f(x_0)=0$ $\Big\}$ $f(x)>0>x_0$. Άρα $f(x)-x_0>0$

Συνεπώς $f(x)=0$, η οποία από Γ3(i) έχει μοναδική λύση την $x=x_0\notin(x_0,+\infty)$

Άρα η εξίσωση $f^2(x)-x_0 f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$

Γ4) $E = \dfrac{OK \cdot MK}{2} = \dfrac{x \cdot (x^2+1)}{2} = \dfrac{1}{2}(x^3+x)$

αφού $E = E(t)$ τότε $E(t) = \dfrac{1}{2}\left((x(t))^3 + x(t)\right)$ άρα

$E'(t) = \dfrac{1}{2}\left((x(t))^3 + x(t)\right)' = \dfrac{1}{2}\left(3(x(t))^2 \cdot x'(t) + x'(t)\right)$.

Την χρονική στιγμή $t = t_0$, ισχύει $E'(t_0) = \dfrac{1}{2}\left(3(x(t_0))^2 \cdot x'(t_0) + x'(t_0)\right) =$

$= \dfrac{1}{2}\left(6(x(t_0))^2 + 2\right) = 28$ τμ/sec.

Δ) Δ.1. $f(x) = (x-1)\cdot \ln(x^2-2x+2) + \alpha x + \beta$

$y = -x + 2.$ $\qquad A(1,1)$

$f(1) = 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha + \beta = 1}$

$f'(1) = -1$

$f'(x) = \ln(x^2-2x+2) + (x-1)\cdot \frac{1}{x^2-2x+2}\cdot(2x-2) + \alpha$

$f'(1) = -1 \Leftrightarrow \alpha = -1 \qquad$ άρα $\qquad \beta = 1 - \alpha = 2$

Δ.2. $E(\Omega) = \int_1^2 |f(x) - y|\,dx =$

$\int_1^2 |(x-1)\ln(x^2-2x+2) - x + 2 + x - 2|\,dx =$

$\int_1^2 |(x-1)\ln(x^2-2x+2)|\,dx = \int_1^2 (x-1)\ln(x^2-2x+2)\,dx$

$x^2-2x+2 = u$

$(2x-2)\,dx = du$

$\int_1^2 \frac{1}{2}\ln u\,du = \frac{1}{2}\left[u\ln u - u\right]_1^2 = \frac{1}{2}(2\ln 2 - 2) - \frac{1}{2}(-1)$

$\ln 2 - 1 + \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2}.$

Δ3 (i) $f'(x) = \ln(x^2-2x+2) + (x-1)\cdot\frac{1}{x^2-2x+2}\cdot 2(x-1) - 1$

$f'(x) = \underbrace{\ln[(x-1)^2+1]}_{+} + \underbrace{\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}}_{+} - 1 \geq -1$

(ii) $f(\lambda+\frac{1}{2}) + \lambda \geq \underline{(\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)} + \frac{3}{2}$

$f(\lambda+\frac{1}{2}) + \lambda \geq f(\lambda) + \lambda - 2 + \frac{3}{2}$

$\boxed{f(\lambda+\frac{1}{2}) \geq f(\lambda) - \frac{1}{2}}$

$f(\lambda+\frac{1}{2}) + \lambda + \frac{1}{2} \geq f(\lambda) + \lambda$

$\boxed{g(x) = f(x) + x}$

$g'(x) = f'(x) + 1 \geq 0$

$g \uparrow \qquad \lambda + \frac{1}{2} \geq \lambda \qquad$ Ισχύει

Δ4)

ΕΣΤΩ $A(x_1, f(x_1))$ ΤΟ Σ.Ε. ΤΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

ΤΗΣ C_f

ΚΑΙ $B(x_2, g(x_2))$ ΤΟ Σ.Ε. ΤΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

ΤΗΣ C_g.

ΑΠΟ Δ3 i) $f'(x_1) \geq -1$, $\forall x_1 \in \mathbb{R}$ ΙΣΟΤΗΤΑ ΜΟΝΟ ΓΙΑ $x_1 = 1$

$g'(x_2) = -3x_2^2 - 1 \leq -1$, $\forall x_2 \in \mathbb{R}$ ΙΣΟΤΗΤΑ ΜΟΝΟ ΓΙΑ $x_2 = 0$

ΑΡΑ $f'(x_1) \geq -1 \geq g'(x_2)$, $\forall x_1 \in \mathbb{R}$ ΚΑΙ $x_2 \in \mathbb{R}$

ΜΕ ΤΗΝ ΙΣΟΤΗΤΑ ΜΟΝΟ ΓΙΑ $x_1 = 1$ ΚΑΙ $x_2 = 0$.

Η ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΤΗΣ C_f ΣΤΟ $A(1,1)$ Η $y = -x + 2$

Η ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΤΗΣ C_g ΣΤΟ $B(0,2)$ Η:

$y - g(0) = g'(0)(x - 0) \Longrightarrow y - 2 = -x \Longleftrightarrow y = -x + 2$

ΑΡΑ ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΚΟΙΝΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ Η $y = -x + 2$.