Λύσεις Θεμάτων Μαθηματικών

Γ' Τάξης ΕΠΑ.Λ. – Εξετάσεις 2019.

ΘΕΜΑ Α

A1 Απόδειξη σελ. 28 σχολ. βιβλίο
A2 Σελ. 59 σχολ. βιβλίο

A3
α → Λ
β → Σ
γ) → Λ
δ) → Λ
ε) → Σ

ΘΕΜΑ Β.

$11, 7, \kappa, 13, 11, 10$

$CV = 20\% \to CV = 0,2 \qquad s^2 = 4 \qquad s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$

B1 $CV = \frac{s}{\bar{x}} \Rightarrow \bar{x} = \frac{s}{CV} = \frac{2}{0,2} = \frac{20}{2} \Rightarrow \bar{x} = 10$

B2 $\bar{x} = \frac{11+7+\kappa+13+11+10}{6} = 10 \Rightarrow \frac{52+\kappa}{6} = 10 \Rightarrow 52+\kappa = 60 \Rightarrow$

$\Rightarrow \kappa = 60 - 52 \Rightarrow \kappa = 8$

B3 οι τιμές σε αύξουσα σειρά: $7, 8, 10, 11, 11, 13$

$\nu = 6$ (άρτιος) Μεσαίες: 3η → 10 4η → 11

$\delta = \frac{10+11}{2} = \frac{21}{2} \Rightarrow \delta = 10,5$

$R = t_{max} - t_{min} = 13 - 7 \Rightarrow R = 6$

(Β4) $x_i' = x_i - 2$ Άρα $\bar{x}' = \bar{x} - 2$

$s' = s$

$$CV' = \frac{s'}{\bar{x}'} = \frac{s}{\bar{x}-2} = \frac{2}{10-2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ ή } 25\%$$

Το δείγμα είναι ανομοιογενές γιατί $CV > 10\%$

ΘΕΜΑ Γ

(Γ1) $$f'(x) = \left(\sqrt{x^2-2x+10}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2-2x+10}} \cdot (x^2-2x+10)' = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+10}} =$$

$$= \frac{2(x-1)}{2\sqrt{x^2-2x+10}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}$$

(Γ2) $$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}} = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	Τ.Ε.	↗	

Στο $(-\infty, 1]$ η f είναι ↘

Στο $[1, +\infty)$ η f είναι ↗

(Τ.Ε) → $f(1) = \sqrt{1^2 - 2\cdot 1 + 10} = \sqrt{1-2+10} = \sqrt{-1+10} = \sqrt{9} = 3$

Από ορισμό Τ.Ε. ⇝ $f(x) \geq Τ.Ε \Rightarrow f(x) \geq f(1) \Rightarrow f(x) \geq 3$

(Γ3) $y = \lambda x + \beta$ $\quad \lambda = f'(5) = \frac{5-1}{\sqrt{5^2-2\cdot 5+10}} = \frac{4}{\sqrt{25-10+10}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$

$y = f(5) = \sqrt{5^2 - 2\cdot 5 + 10} = \sqrt{25-10+10} = \sqrt{25} \Rightarrow y = 5$

$$y = \lambda x + \beta \Rightarrow 5 = \frac{4}{5}\cdot 5 + \beta \Rightarrow 5 = 4 + \beta \Rightarrow 5 - 4 = \beta \Rightarrow \beta = 1$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η:

$$y = \frac{4}{5}x + 1$$

Γ4 Σημείο Α (Σημείο τομής με τον άξονα $x'x$)

$y=0$

$$y = \frac{4}{5}x+1 \xrightarrow{y=0} 0 = \frac{4}{5}x+1 \Rightarrow \frac{4}{5}x = -1 \Rightarrow x = -\frac{5}{4}$$

Σημείο Α $\rightarrow$ $A\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$

Σημείο Β (Σημείο τομής με τον άξονα $y'y$)

$x=0$

$$y = \frac{4}{5}x+1 \xrightarrow{x=0} y = \frac{4}{5}\cdot 0+1 \Rightarrow y=1$$

Σημείο Β $\rightarrow$ $B(0,1)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 $f(x) = x^3-3x^2+\lambda x \xrightarrow{\lambda=3} f(x) = x^3-3x^2+3x$

$$f'(x) = (x^3)'-(3x^2)'+(3x)' = 3x^2-6x+3$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-6x+3=0 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1 \quad \text{(διπλή ρίζα)}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$		↗		↗	

Οι τιμές $x_1=\frac{3}{8}$ και $x_2=\frac{5}{6}$ ανήκουν στο $(-\infty,1]$
στο οποίο η f είναι γν. αύξουσα

$$\frac{3}{8}<\frac{5}{6} \xrightarrow[\nearrow]{\eta\ f} f\left(\frac{3}{8}\right)<f\left(\frac{5}{6}\right)$$

Δ2 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-6x+3}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)}\ \frac{0}{0}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3(x^2-2x+1)\cdot(\sqrt{x}+1)}{\underbrace{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}_{(\sqrt{x})^2-1^2}x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)^2\cdot(\sqrt{x}+1)}{(x-1)\cdot x\cdot(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{3(\sqrt{x}+1)}{x}=$$

$$=\frac{3(\sqrt{1}+1)}{1}=3\cdot 2=6$$

Δ3 ελάχιστος συντελεστής διεύθυνσης $\rightarrow$ λ ελάχιστος

Μελέτη $f'(x)$ ως προς τα ακρότατα

$f'(x)=3x^2-6x+3 \qquad (f'(x))'=(3x^2)'-(6x)'+(3)'=6x-6$

$(f'(x))'=f''(x)=0 \Rightarrow 6x-6=0 \Rightarrow 6x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{6}\Rightarrow x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	Τ.Ε.	$\nearrow$	

Για $x=1$ $f'(x)\rightarrow$ ελάχιστη

Άρα λ γίνεται ελάχιστος όταν $x=1$.

$y=f(1)=1^3-3\cdot 1^2+3\cdot 1=1-3+3\Rightarrow y=1.$

Άρα το σημείο στο οποίο ο συντελεστής διεύθυνσης γίνεται ελάχιστος είναι το $(1,1)$

Δ4 Η f δεν παρουσιάζει ακρότατα

→ Η $f'(x)$ δεν αλλάζει πρόσημο.

$f'(x) = 3x^2 - 6x + \lambda$

Για να είναι $3x^2 - 6x + \lambda$ χωρίς αλλαγή προσήμου θα πρέπει $\Delta \leq 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \lambda \leq 0 \Rightarrow 36 - 12\lambda \leq 0$

$\Rightarrow 36 \leq 12\lambda \Rightarrow \lambda \geq \frac{36}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda \geq 3$

Άρα θα πρέπει $\lambda \geq 3$ για να μην έχει ακρότατα η $f(x)$.

Δηλαδή η ελάχιστη τιμή του λ είναι $\lambda = 3$.